Modélisation des équations aux dérivées partielles en géométrie non plane

2017

1 Introduction

On s'intéressera ici à la modélisation des équations aux dérivées partielles en géométrie non plane, avec un intérêt tout particulier pour les équations de Navier-Stokes.

2 Analyse des équations de Navier-Stokes

2.1 Introduction

Avant d'aborder le problème de leur modélisation, on s'attachera à l'analyse des équations de Navier-Stokes en géométrie non plane. En particulier, on présentera une adaptation de la preuve de l'existence de solutions faibles de l'équation par J. Leray (voir [?]) sur une variété différentielle compacte sans bords.
Le choix d'une telle variété, en plus de simplifier le problème, correspond à la motivation initiale de ce travail, qui portait sur la modélisation de dynamiques fluides à la surface de bulles.

2.2 Résumé de la preuve

On commence par rappeler la forme et l'interprétation physique des équations de Navier-Stokes. En écrivant le principe fondamental de la dynamique pour une particule fluide, on établit une équation aux dérivées partielles qui décrit le fluide.
Pour que le système soit bien posé, il est nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire sur la nature du fluide. Pour les équations de Navier-Stokes, on le supposera incompressible, ce qui se traduit par

$$\partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) = -\nabla P + \nu \Delta u$$
$$\nabla \cdot u = 0$$

où u est le champ vectoriel des vitesses de fluide, P le champ scalaire de pression, et $\nu > 0$ la constante de viscosité.

Par des arguments inspirés de la compréhension physique de la mécanique des fluides, on montre que l'énergie totale du fluide diminue au cours du temps, sur une variété compacte sans bords :

$$\partial_t \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 = -\nu \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

On va alors naturellement chercher u dans les espaces de Sobolev H^s.
Dans ce but, on va projeter l'équations sur les k premiers modes propres de Fourier pour se ramener à un problème plus simple en dimension finie. On remarquera que l'inégalité d'énergie est toujours valable, ce qui permet d'avoir une solution globale u_k du problème tronqué. Cette inégalité donnant de plus une borne indépendante de k, on va chercher à extraire de (u_k) une sous-suite convergente par des arguments de compacité. Pour ce faire, on utilisera des résultats classiques d'analyse fonctionnelle.
On observera enfin que la limite u est une solution faible du système initial, dans le sens où elle

vérifie, pour tout $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$, pour tout φ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, H^1(M))$ à divergence nulle, on obtient

$$\int_M \langle u|\varphi\rangle + \int_{[0,t]\times M} (\nu\langle\nabla u : \nabla phi\rangle - \langle u\otimes u : \nabla\varphi\rangle - \langle u|\partial_t\varphi\rangle) = \int_M \langle u(t=0)|\varphi(t=0)\rangle.$$

(où $\langle A : B\rangle$ est défini comme étant l'analogue du produit scalaire matriciel $A\,{}^tB$ en géométrie riemannienne)
Dans le cadre d'une variété compacte sans bords, cette preuve se transpose sans grande difficulté et permet d'obtenir l'existence de solutions faibles définies pour tout temps.

2.3 Cadre géométrique

Dans la suite, M sera une variété C^∞ riemannienne orientable compacte sans bords, de dimension d. On notera g son tenseur métrique. On choisit un ensemble fini de cartes $\varphi_n : U_n \to \mathbb{R}^d$ qui recouvre la variété, et on note χ_n une partition de l'unité associée au recouvrement.
On note de plus ∇ la connexion de Levi-Civita associée à g, et $d\omega$ la forme de volume. On cherchera alors un champ de vecteurs tangents u solution des équations

$$\partial_t u + \nabla_u u = \operatorname{grad} P + \nu\Delta u \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{2}$$

dans un espace fonctionnel approprié, avec pour condition initiale $u(t=0)$ à divergence nulle.

2.4 Inégalité d'énergie

La première étape, essentielle pour la compréhension de la suite, consiste à établir l'inégalité d'énergie. On l'obtient en prenant le produit scalaire de (1) avec u, et en intégrant sur la variété, puis à l'aide d'intégrations par parties,

$$\frac{1}{2}\int_M \partial_t|u|^2 = -\int_M \langle u|\nabla_u u\rangle - \int_M P div\, u - \nu\int_M |\nabla u|^2.$$

Avec la contrainte d'incompressibilité, on obtient $\int_M P\operatorname{div} u = 0$. On établit de plus que

$$\int_M \langle u|\nabla_u u\rangle = \int_M \operatorname{div}(|u|^2 u) = 0.$$

Il reste donc

$$\partial_t \frac{1}{2}\int_M |u|^2 = -\nu\int_M |\nabla u|^2. \tag{3}$$

2.5 Obtention d'une équation fermée

Le problème qu'on cherche à résoudre est donné par deux équations couplées, ce qui est peu pratique à manipuler. On s'aperçoit en fait que la pression ne joue que le rôle d'un multiplicateur de Lagrange pour assurer l'incompressibilité de u, qui se traduit par l'appartenance au sous-espace des champs à divergence nulle. On va alors obtenir des équations plus simples en projetant sur ce sous-espace ainsi que son orthogonal.
Tout d'abord, en prenant la divergence de l'équation (1), on obtient

$$\Delta P = \operatorname{div} \nabla_u u.$$

Or, sur une variété compacte, le laplacien corestreint aux champs de moyenne nulle est inversible (voir [?]). Notre variété étant sans bords, un champ donné par une divergence est nécessairement de moyenne nulle, d'où l'obtention d'une formule pour P en fonction de u :

$$P = \Delta^{-1}\operatorname{div} \nabla_u u.$$

On cherche maintenant à avoir une équation sur u qui ne fasse pas intervenir la pression. Pour cela, on définit le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle par $\mathbb{P}u = u - \operatorname{grad}\Delta^{-1}\operatorname{div} u$. En l'appliquant à (1),

$$\partial_t u = -\mathbb{P}\nabla_u u + \nu\mathbb{P}\Delta u \tag{4}$$

qui est bien une équation fermée sur u.

2.6 Décomposition sur les modes propres

On appelle opérateur de Stokes l'opérateur $\mathbb{P}\Delta$ obtenu. On montre qu'il s'agit d'un opérateur compact auto-adjoint défini positif, et d'après le théorème spectral, on a une base hilbertienne de l'espace des champs à divergence nulle constituée de vecteurs propres $\xi_1, \xi_2, \ldots$ associés à des valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ qui tendent vers 0.
Définissons maintenant le projecteur orthogonal P_k sur les k premières coordonnées de cette base. En l'appliquant à (4), on obtient

$$\partial_t P_k u = -P_k \nabla_u u + \nu \Delta P_k u$$

(On note que comme on a pris les ξ_n à divergence nulle, P_k remplit également le rôle du projecteur de Leray.)
Cette équation laisse penser qu'on peut approximer efficacement u par des solutions « tronquées ». On définit alors pour tout k l'équation

$$\partial_t u_k = -P_k \nabla_{u_k} u_k + \nu u_k \tag{5}$$

$$u_k(t=0) = P_k u(t=0).$$

Il s'agit donc d'une équation différentielle ordinaire dans un espace de dimension finie. Pour trouver une solution localement, on veut montrer qu'elle satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

2.7 Résolution de l'équation approchée

On va donc chercher à contrôler la continuité de $u \to P_k \nabla_u u$. Pour ce faire, on commence par écrire $\nabla_u u = \mathrm{div}(u \otimes u)$, puisque u est à divergence nulle. En utilisant Cauchy-Schwartz, on montre que $||u \otimes v||_{L^2(M)} \leq ||u||_{L^4(M)} ||v||_{L^4(M)}$.
Pour tout ouvert U_n accompagné d'une carte ϕ_n, on peut écrire l'inégalité de Sobolev et obtenir pour une certaine constante C

$$||\chi_n u \circ \phi_n||_{L^4(\mathbb{R}^d)} \leq C ||\chi_n u \circ \phi_n||_{H^{d/4}(\mathbb{R}^d)}.$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit u dans H^s. Alors*

$$||u||_{H^s} \leq ||u||_{H^1}^s ||u||_{L^2}^{1-s}$$

Démonstration. On applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{1}{s}$ et $\frac{1}{1-s}$:

$$\begin{aligned} ||u||_{H^s}^2 &= \int |\widehat{u}(k)|^2 (1+|k|^2)^s \, dk \\ &= \int \left(|\widehat{u}(k)|^2 (1+|k|^2)\right)^s \left(|\widehat{u}(k)|^2\right)^{1-s} dk \\ &\leq \left(\int |\widehat{u}(k)|^2 (1+|k|^2) dk \right)^s \left(\int |\widehat{u}(k)|^2 dk \right)^{1-s} \\ &\leq ||u||_{H^1}^{2s} ||u||_{L^2}^{2-2s} \end{aligned}$$

□

On en déduit

$$||\chi_n u \circ \phi_n||_{L^4(\mathbb{R}^d)} \leq C ||\chi_n u \circ \phi_n||_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{d/4} ||\chi_n u \circ \phi_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1-d/4}$$

Maintenant, comme la métrique est riemannienne non dégénérée sur une variété compacte, on peut encadrer la forme de volume, et donc majorer les intégrales sur $\mathbb{R}^d$ (qui ne tiennent pas compte de la métrique) par les intégrales sur M (qui en tiennent compte), et inversement :

$$\begin{aligned}
||u||_{L^4(M)} &\le \sum_n ||\chi_n u||_{L^4(M)} \\
&\le \sum_n C_n ||\chi_n u \circ \phi_n||_{L^4(\mathbb{R}^d)} \\
&\le \sum_n C'_n ||\chi_n u \circ \phi_n||_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{d/4} ||\chi_n u \circ \phi_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1-d/4} \\
&\le \sum_n C''_n ||\chi_n u||_{H^1(M)}^{d/4} ||\chi_n u||_{L^2(M)}^{1-d/4}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on note que

$$\begin{aligned}
||\chi_n u||_{H^1(M)} &= \left(\int_M |\chi_n u|^2 + |\nabla(\chi_n u)|^2 \right)^{1/2} \\
&\le ||\chi_n||_{L^\infty(M)} ||u||_{H^1(M)} + ||\nabla \chi_n||_{L^\infty(M)} ||u||_{L^2(M)} \\
&\le C ||u||_{H^1(M)}.
\end{aligned}$$

Comme notre variété est compacte, elle est recouverte par un nombre fini de cartes. On peut donc en déduire l'existence de constantes (notées C) pour lesquelles

$$||u||_{L^4(M)} \le C ||u||_{H^1(M)}^{d/4} ||u||_{L^2(M)}^{1-d/4} \tag{6}$$

puis en combinant avec la majoration donnée par Cauchy-Schwarz

$$||u \otimes v||_{L^2(M)} \le C ||u||_{H^1(M)}^{d/4} ||u||_{L^2(M)}^{1-d/4} ||v||_{H^1(M)}^{d/4} ||v||_{L^2(M)}^{1-d/4}$$

$$||\mathrm{div}(u \otimes v)||_{H^{-1}(M)} \le C ||u||_{H^1(M)}^{d/4} ||u||_{L^2(M)}^{1-d/4} ||v||_{H^1(M)}^{d/4} ||v||_{L^2(M)}^{1-d/4}. \tag{7}$$

P_k étant un projecteur orthogonal, on en déduit que la partie non linéaire de l'équation tronquée (5) est bien localement lipschitzienne, et comme c'est évidemment le cas pour la partie linéaire, elle satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.
On en déduit l'existence de solutions locales de (5), pour tout k. Pour s'assurer que ces dernières n'explosent pas en temps fini, on se sert de l'inégalité d'énergie, qui reste valable pour l'équation tronquée :

Lemme 2. *Une solution u_k de (5) définie sur $[0,T]$ vérifie pour tout $t \in [0,T]$*

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_M |u_k|^2 = -\nu \int_M |\nabla u_k|^2 \tag{8}$$

Démonstration. Comme précédemment, on commence par prendre le produit scalaire de (5) avec u_k, puis on intègre sur M. Après intégration par parties,

$$\partial_t \int_M |u_k|^2 = -\int_M \langle u_k | P_k \nabla_{u_k} u_k \rangle - \nu \int_M |\nabla u_k|^2$$

Comme P_k est un projecteur orthogonal, et que u_k est dans son image,

$$\begin{aligned}
\int_M \langle u_k | P_k \nabla_{u_k} u_k \rangle &= \int_M \langle P_k u_k | \nabla_{u_k} u_k \rangle \\
&= \int_M \langle u_k | \nabla_{u_k} u_k \rangle \\
&= \int_M \mathrm{div}(u_k |u_k|^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Les solutions données par Cauchy-Lipschitz sont donc majorées pour tout temps, et ne peuvent pas exploser en temps fini. On en déduit qu'il s'agit de solutions globales.

2.8 Extraction d'une limite

On a donc obtenu une famille de solutions approchées (u_k) définies sur $\mathbb{R}_+$. On aimerait en extraire une limite, et obtenir alors une solution de l'« équation limite ». Pour ce faire, on va chercher à exhiber de la compacité.

En intégrant (8), on obtient

$$\frac{1}{2}||u_k(t)||^2_{L^2(M)} + \nu\int_0^t ||\nabla u_k||^2_{L^2(M)} = \frac{1}{2}||u_k(0)||^2_{L^2(M)} \leq ||u(0)||^2_{L^2(M)}. \tag{9}$$

On a donc une majoration à la fois en norme $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(M))$ et $L^2(\mathbb{R}_+, H^1(M))$, uniforme en k. Pour avoir de la compacité, d'après le théorème d'Ascoli, on a besoin d'une suite équicontinue et équibornée.
On a ainsi déjà obtenu le caractère équiborné. De notre majoration, on déduit en plus que la suite $(-\Delta u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}_+, H^{-1}(M))$, et grâce à (7), on peut avoir

$$||P_k\nabla_{u_k}u_k||_{H^{-1}} \leq C||\nabla u_k||^{d/2}_{L^2(M)}||u_k||^{2-d/2}_{L^2(M)}.$$

On en déduit donc une majoration sur $\partial_t u_k$:

$$||\partial_t u_k||_{H^{-1}(M)} \leq \nu|| - \Delta u_k||_{H^{-1}(M)} + C||\nabla u_k||^{d/2}_{L^2(M)}||u_k||^{2-d/2}_{L^2(M)}$$

après avoir mis à la puissance $4/d$ et intégré, cela permet de borner la suite $(\partial_t u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $L^{4/d}(\mathbb{R}_+, H^{-1}(M))$. On peut alors écrire, à l'aide de l'inégalité de Hölder,

$$||u_k(t) - u_k(t')||_{H^{-1}(M)} = ||\int_t^{t'} \partial_t u_k||_{H^{-1}} \leq |t-t'|^{1-d/4}||\partial_t u_k||_{L^{4/d}([t,t'],H^{-1}(M))} \tag{10}$$

qui donne l'équicontinuité de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On note toutefois que l'équicontinuité est au sens des fonctions à valeur dans H^{-1} tandis que le caractère équiborné est au sens des fonctions à valeur dans L^2. Pour ramener ça au même espace, on note que L^2 est inclus de manière compacte dans H^{-1}.

Lemme 3. Corollaire du théorème de Rellich-Kondrachov *Pour une variété compacte orientable M, l'inclusion de $L^2(M)$ dans $H^{-1}(M)$ est compacte — dans le sens où l'opérateur d'inclusion est un opérateur compact.*

Démonstration. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^2(M)$.
Lorsqu'on choisit une carte (U_n, ϕ_n), la suite $(\chi_n f_k \circ \phi_n)$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème de Rellich-Kondrachov, cette dernière admet une valeur d'adhérence g_n dans $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$.
En choisissant les cartes une à une et en extrayant une sous-suite à chaque étape, on peut s'assurer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour toute carte, $\chi_n f_{\varphi(k)} \circ \phi_n$ tende vers g_n dans $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$.
On pose maintenant $g = \sum_n g_n \circ \phi_n^{-1}$, qui est une somme finie puisque notre variété est compacte. On encadre comme précédemment la forme de volume sur chaque carte pour obtenir qu'il s'agit d'un élément de $H^{-1}(M)$, et en remarquant que

$$f_k - g = \sum_n (\chi_n f_k - g_n)$$

on obtient, après un dernier passage par des cartes, que $(f_\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ tend effectivement vers g dans $H^{-1}(M)$. L'inclusion est bien compacte. $\square$

Ainsi, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien équicontinue et équibornée à valeurs dans $H^{-1}(M)$. On en déduit, d'après le théorème d'Ascoli, que pour tout T réel, il existe u dans $\mathcal{C}([0,T], H^{-1}(M))$ tel qu'à extraction près, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ restreinte à $[0,T]$ tende vers u.
De plus, (9) indique que la suite est bornée dans $L^2([0,T], H^1(M))$. Comme cet espace est un Hilbert, le théorème de Banach-Alaoglu indique qu'on peut choisir une extraction qui, en plus,

converge faiblement dans $L^2([0,T],H^1(M))$.
On fait ensuite tendre T vers l'infini, et, à l'aide d'un procédé d'extraction diagonale, on obtient un champ $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,H^{-1}(M)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,H^1(M))$ tel que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (après extraction) converge fortement vers u dans $\mathcal{C}_{loc}(\mathbb{R}_+,H^{-1}(M))$ et faiblement dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,H^1(M))$.

On a de plus, pour toute carte (U_n,ϕ_n), en utilisant une partition de l'unité comme précédemment — ici omise pour plus de clarté :

$$\begin{aligned}||u_k-u||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \int_{\mathbb{R}^d}(\widehat{u_k}(k)-\widehat{u}(k))^2\frac{1}{1+|k|^2}(1+|k|^2)\\ &\leq ||u_k-u||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}||u_k-u||_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq ||u_k-u||_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}(||\nabla u_k||_{L^2(\mathbb{R}^d)}+||\nabla u||_{L^2(\mathbb{R}^d)}).\end{aligned}$$

On encadre alors la forme de volume pour obtenir des inégalités sur U_n et on regroupe les différentes cartes pour avoir

$$||u_k-u||_{L^2(M)} \leq C||u_k-u||_{H^{-1}(M)}(||\nabla u_k||_{L^2(M)}+||\nabla u||_{L^2(M)}).$$

On intègre alors sur $[0,T]$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour avoir une convergence forte vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,L^2(M))$.

2.9 Solution faible

On cherche maintenant à montrer que le champ u obtenu est solution faible de l'équation de Navier-Stokes, dans le sens où pour tout φ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,H^1(M))$ à divergence nulle, on obtient

$$\int_M\langle u|\varphi\rangle+\int_{[0,t]\times M}(\nu\langle\nabla u:\nabla phi\rangle-\langle u\otimes u:\nabla\varphi\rangle-\langle u|\partial_t\varphi\rangle)=\int_M\langle u(t=0)|\varphi(t=0)\rangle.$$

On choisit donc un tel φ. Puisque u_k est solution de (5), on peut écrire

$$\begin{aligned}\partial_t\int_M\langle u_k|\varphi\rangle &= \int_M\langle\partial_t u_k|\varphi\rangle+\int_M\langle u_k|\partial_t\rangle\\ &=\nu\int_M\langle P_k\Delta u_k|\varphi\rangle+\int_M\langle P_k\nabla_{u_k}u_k|\varphi\rangle+\int_M\langle u_k|\partial_t\rangle.\end{aligned}$$

On peut maintenant faire des intégrations par parties, en notant que P_k est un projecteur orthogonal donc autoadjoint :

$$\int_M\langle P_k\Delta u_k|\varphi\rangle=-\int_M\langle\nabla u_k:\nabla P_k\varphi\rangle$$

$$\begin{aligned}\int_M\langle P_k\nabla_{u_k}u_k|\varphi\rangle &= \int_M\langle P_k\mathrm{div}\, u_k\otimes u_k|\varphi\rangle\\ &=-\int_M\langle u_k\otimes u_k:\nabla P_k\varphi\rangle.\end{aligned}$$

En intégrant $\partial_t\int_M\langle u_k|\varphi\rangle$ entre 0 et t, on obtient alors

$$\int_M\langle u_k|\varphi\rangle+\int_{[0,t]\times M}(\nu\langle\nabla u_k:\nabla P_k\varphi\rangle-\langle u_k\otimes u_k:\nabla P_k\varphi\rangle-\langle u_k|\partial_t\varphi\rangle)=\int_M\langle u_k(t=0)|\varphi(t=0)\rangle.$$

Cherchons maintenant à prendre la limite de u_k dans cette équation.
Comme on a choisi φ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,H^1)$, la définition de P_k permet d'écrire que pour tout t, $\nabla P_k\varphi$ tend fortement vers φ dans $L^2(M)$. Le théorème de convergence dominée permet ensuite d'avoir la convergence dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,L^2(M))$. Or u_k converge faiblement vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,H^1(M))$, d'où

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,t]\times M}(\nu\langle\nabla u_k:\nabla P_k\varphi\rangle-\langle u_k|\partial_t\varphi\rangle)=\int_{[0,t]\times M}(\nu\langle\nabla u:\nabla\varphi\rangle-\langle u|\partial_t\varphi\rangle).$$

Le terme non-linéaire est le plus difficile à traiter, on a besoin de convergence forte. On l'a dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, L^2(M))$, et on a montré dans (6) que pour toute fonction f pour laquelle ces normes sont définies

$$||f||_{L^4(M)} \leq C||f||^{d/4}_{H^1(M)}||f||^{1-d/4}_{L^2(M)}$$

Comme $u - u_k$ est de plus dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H^1)$, on en déduit avec Hölder que u_k converge fortement vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, L^4(M))$. φ ayant été choisi suffisemment régulier et P_k étant orthogonal, $\nabla P_k\varphi$ tend fortement vers $\nabla\varphi$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(M))$. On va alors pouvoir appliquer une dernière fois Hölder et obtenir la convergence du terme non-linéaire :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,t]\times M} \langle u_k \otimes u_k | \nabla P_k\varphi\rangle = \int_{[0,t]\times M} \langle u \otimes u | \nabla\varphi\rangle$$

ce qui conclut la preuve.